スタディサプリ　センター数学ＩＡについて

この講座は,「平成 28・29・30 年度　大学入試センター試験　本試験・追試験」をベースに, 大学入学共通テストの数学の学習を進める上で土台となる「誘導形式のマーク式試験を解くために必要な力とは何か」をお伝えするための講座です。

センター数学は, その答える形式はマークではあるものの, そこに至るまでに必要な力は, 記述試験と遜色ありません。また, 決して長いとは言えない試験時間内に確実に解答に至るために, 迷いや遠回りがほぼ許されないという点では, ある意味, 記述試験より厳しい試験と言えます。一見して親切に見える誘導も, あなたにやってほしいすべてのことを伝えてくれているわけではなく,「流れ」を理解し, 省略されているプロセスや途中計算を補いながら, 必要に応じてあなた自身で解答を作っていく, そんな試験です。ゆえに, 数学に関しては, 記述力がある人でもセンターで点数がとれない, ということが起こりうるのです。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が, 大学入学共通テストを読み解くために必要な土台となる力に対して, どこまで到達し, 上回り, また下回っているかについて, 予習と講義動画を通じて分野別に整理することで, あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

この講座をきっかけとし, さらに思考力・判断力・表現力を磨くための学習に進むべきか, 単元・項目ベースの基本に戻るべきか, それを把握して学習を進めることが, 大学入学共通テストのみで数学を使う人はもちろん, 個別選抜で数学を使う人にとっても, 実力向上のカギとなります。あなたに必要な, あなただけのカギ, ぜひこの講座で発見してください。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講（１日目）　**式と計算・関数・命題**

第２講（２日目）　**三角比・データの分析**

第３講（３日目）　**場合の数・確率**

第４講（４日目）　**整数の性質**

第５講（５日目）　**平面図形**

※該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。

第１講　式と計算・関数・命題

1 (1) $k=\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}$ とする。分母を有理化すると

$$k=\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}-\boxed{\text{ウ}}$$

となる。また，k の整数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(2) x に関する不等式

$$6 \geqq |(\sqrt{3}+1)x-12|$$

を解くと

$$\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}-\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}$$

となり，この不等式を満たす整数は全部で $\boxed{\text{サ}}$ 個ある。

2　a，b は定数で，$a \neq 0$ とする。x の２次関数

$$y = a^2x^2 - 4ax + b \quad \cdots\cdots ①$$

を考える。①のグラフの頂点の x 座標が１以上３以下になるような a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq a \leqq \boxed{ウ}$ である。

下の $\boxed{エ}$ には，次の⓪～④のうちから当てはまるものを一つ選べ。

⓪　$>$　　①　$<$　　②　$\geqq$　　③　$\leqq$　　④　$\neq$

x の２次不等式

$$a^2x^2 - 4ax + b < 0 \quad \cdots\cdots ②$$

の解が存在するような b の値の範囲は

$b\ \boxed{エ}\ \boxed{オ}$

である。また②の解が $1 < x < 3$ になるような a，b の値は

$a = \boxed{カ}$，　$b = \boxed{キ}$

である。

3　実数 x について

命題A：「$x^2>2$ または $x^3>0$」ならば「$x>2$」

を考える。

(1)　次の［ア］〜［エ］に当てはまるものを，下の⓪〜⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

命題Aの逆，対偶を考えると次のようになる。

逆：「［ア］」ならば「［イ］」

対偶：「［ウ］」ならば「［エ］」

⓪　$x^2>2$ または $x^3>0$　　①　$x^2>2$ かつ $x^3>0$

②　$x^2\leqq 2$ または $x^3\leqq 0$　　③　$x^2\leqq 2$ かつ $x^3\leqq 0$

④　$x>2$　　⑤　$x\leqq 2$

(2)　次の［オ］に当てはまるものを，下の⓪〜⑥のうちから一つ選べ。

命題Aとその逆，対偶のうち，［オ］が真である。

⓪　命題Aのみ　　①　命題Aの逆のみ

②　命題Aの対偶のみ　　③　命題Aとその対偶の二つのみ

④　命題Aとその逆の二つのみ

⑤　命題Aの逆と命題Aの対偶の二つのみ

⑥　三つすべて

（次ページに続く）

(3) 次の カ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

実数 x についての条件「$x^2>2$ または $x^3>0$」は，「$x>2$」であるための カ 。

⓪ 必要条件であるが，十分条件ではない

① 十分条件であるが，必要条件ではない

② 必要十分条件である

③ 必要条件でも十分条件でもない

第２講　三角比・データの分析

1　△ABC は AB＝4，BC＝$10\sqrt{3}$，AC＝14 を満たす。

(1)　$\cos\angle B=\dfrac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$ である。辺 BC 上に点 D を取り，△ABD の外接円の半径を R とするとき，$\dfrac{\mathrm{AD}}{R}=\boxed{ウ}$ であり，点 D を点 B から点 C まで移動させるとき，R の最小値は $\boxed{エ}$ である。ただし，点 D は点 B とは異なる点とする。

(2)　△ABD の外接円の中心が辺 BC 上にあるとき，

$R=\dfrac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$ であり，△ACD の面積は $\dfrac{\boxed{クケ}\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}}$ である。

2

［1］ 30 人の生徒に数学のテストを行った。次の表 1 は，その結果である。ただし，表 1 の数値はすべて正確な値であるとして解答せよ。

表 1　数学のテストの得点

62	54	44	30	88	24	45	55	68	51	46	86	82	71	63
70	55	61	74	65	74	30	72	74	85	98	66	71	78	96

次の表 2 は，表 1 の 30 人のテストの得点を度数分布表にしたものである。

表 2　30 人の生徒の得点の度数分布表

階級(点)	度数(人)
20 以上　30 未満	1
30 以上　40 未満	2
40 以上　50 未満	3
50 以上　60 未満	4
60 以上　70 未満	6
70 以上　80 未満	8
80 以上　90 未満	4
90 以上 100 未満	2
合　計	30

30 人の得点の中央値は［アイ］である。

［2］　A組からD組の各組30人の生徒に対して理科のテストを行った。次の図1は，各組ごとに理科のテストの得点を箱ひげ図にしたものである。

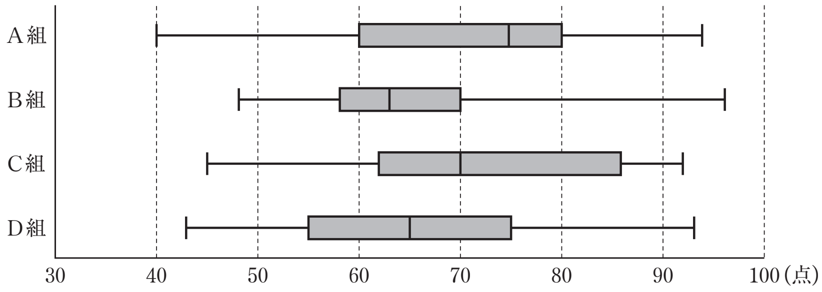


図1　A組からD組の理科のテストの箱ひげ図

(1)　次の［ウ］，［エ］に当てはまるものを，下の⓪～⑤のうちから一つずつ選べ。ただし，解答の順序は問わない。

図1の箱ひげ図について述べた文として**誤っているもの**は［ウ］と［エ］である。

⓪　A，B，C，Dの4組の最高点の生徒がいるのはB組である。

①　A，B，C，Dの4組で比べたとき，四分位範囲が最も大きいのはA組である。

②　A，B，C，Dの4組で比べたとき，範囲が最も大きいのはA組である。

③　A，B，C，Dの4組で比べたとき，第1四分位数と中央値の差が最も小さいのはB組である。

④　A組では，60点未満の人数は80点以上の人数よりも多い。

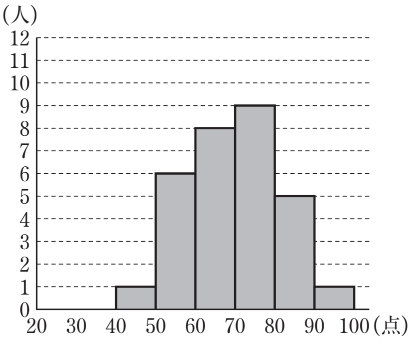
⑤　A組とC組で70点以下の人数を比べたとき，C組の人数はA組の人数以上である。

（次ページに続く）

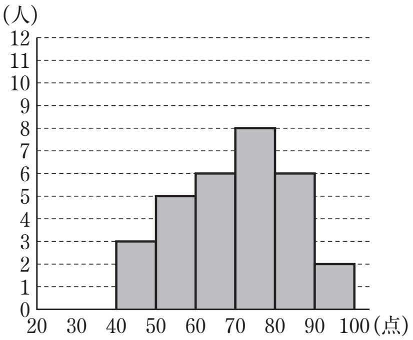
(2)　次の オ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

図１のＣ組の箱ひげ図のもとになった得点をヒストグラムにしたとき，対応するものは オ である。ただし，ヒストグラムは[1]の表２の度数分布表と同じ階級を用いて作成した。

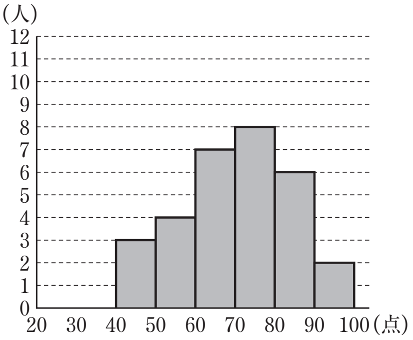
⓪



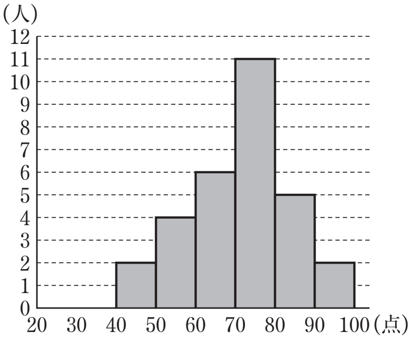
①



②



③



［3］　次の表3は，あるクラスの生徒30人に行った科目Xと科目Yのテストの得点であり，これらの平均値，標準偏差，共分散をまとめたものが下の表4である。

表3　科目Xと科目Yの得点

科目X	63	76	58	71	75	56	81	80	84	77	76	63	63	59	63
科目Y	47	78	60	46	58	63	73	59	66	49	62	58	65	50	42

科目X	77	78	68	59	72	68	79	67	79	73	77	67	63	78	76
科目Y	82	66	40	55	42	69	77	57	63	52	49	45	55	84	56

表4

	平均値	標準偏差
科目X	70.9	7.81
科目Y	58.9	11.74

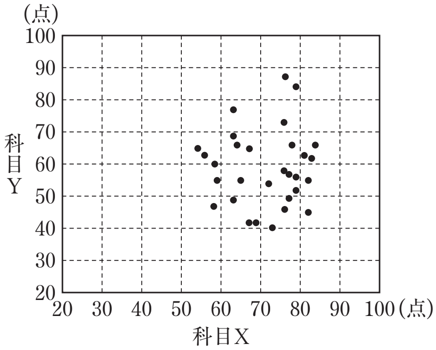
科目Xと科目Yの得点の共分散	36.89

（共分散とは，科目Xの得点の偏差と科目Yの得点の偏差の積の平均値である）

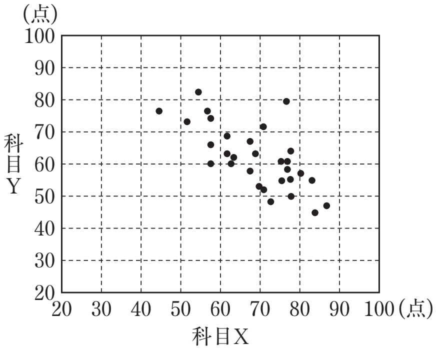
(1)　次の［カ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

科目Xと科目Yの得点を散布図にしたものは［カ］である。

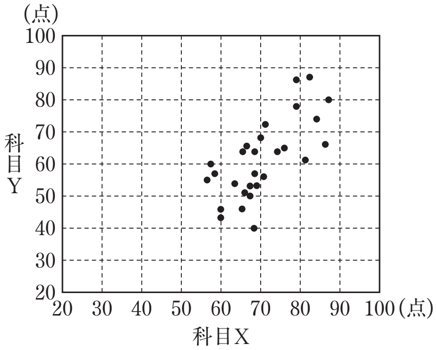
⓪



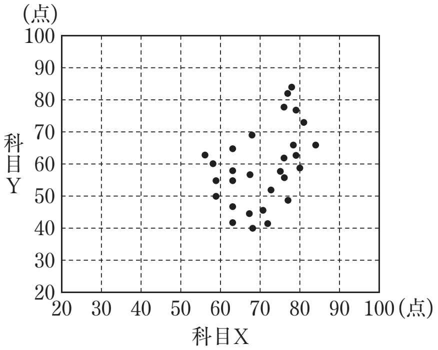
①



②



③



（次ページに続く）

(2)　次の キ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

表3の得点を $\frac{1}{2}$ にして50点満点の得点に換算した。例えば，62点であった場合は得点を2で割った値である31点とし，63点であった場合は31.5点とする。

このとき，科目Xの得点の偏差と科目Yの得点の偏差は，換算後，それぞれもとの得点の偏差の $\frac{1}{2}$ になる。したがって，科目Xについてもとの標準偏差と換算後の標準偏差を比較し，さらにもとの共分散と換算後の共分散を比較すると， キ 。

⓪　換算後の標準偏差と共分散の値はともに，もとの値の $\frac{1}{2}$ になる

①　換算後の標準偏差と共分散の値はともに，もとの値の $\frac{1}{4}$ になる

②　換算後の標準偏差の値はもとの値の $\frac{1}{2}$ になり，共分散の値はもとの値の $\frac{1}{4}$ になる

③　換算後の標準偏差の値はもとの値の $\frac{1}{4}$ になり，共分散の値はもとの値の $\frac{1}{2}$ になる

第３講　場合の数・確率

1　数字 1 が書かれたカードが 4 枚，数字 2 が書かれたカードが 2 枚，数字 5 が書かれたカードが 2 枚，合計 8 枚のカードがある。

(1)　8 枚のカードを一列に並べて 8 桁の整数をつくる。

このときできる 8 桁の整数の個数は全部で [アイウ] 個である。さらに，次の条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数を考える。

(＊)　数字 1 が書かれた 4 枚のカードのどの 2 枚のカードも隣り合わない。

この条件(＊)は，例えば，[1][2][1][5][1][2][1][5] のとき満たされる。条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数の個数は全部で [エオ] 個である。

(2)　一般に，事象 A の確率を $P(A)$ で表す。また，二つの事象 A，B の積事象を $A\cap B$ と表す。

8 枚のカードからでたらめに 3 枚を取り出して袋に入れるという試行を T_1 とし，さらに，その 3 枚のカードが入った袋からでたらめに 1 枚のカードを取り出すという試行を T_2 とする。

試行 T_1 において，袋の中の数字 5 が書かれたカードの枚数が 0 枚である事象を A_0，1 枚である事象を A_1，2 枚である事象を A_2 とすると

$$P(A_0)=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}},\quad P(A_1)=\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サシ}},\quad P(A_2)=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$$

である。

（次ページに続く）

試行 T_2 において数字５が書かれたカードが取り出されるという事象を B とすると

$$P(A_1 \cap B) = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チツ}}, \quad P(A_2 \cap B) = \frac{\boxed{テ}}{\boxed{トナ}}$$

である。

以上のことから，試行 T_2 において数字５が書かれたカードが取り出されたとき，袋の中にもう１枚の数字５が書かれたカードが入っている条件付き確率は $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。

2

[1]　壺(つぼ)の中に１から４までの数字が一つずつ書かれた４枚のカードが入っている。この壺からカードを１枚取り出し，その数字を見てもとの壺に戻す試行を行う。

(1)　この試行を２回行うとき，２回続けて数字１が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}}$ であり，２回続けて奇数の数字が取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ である。

(2)　この試行を４回行うとき，数字１が少なくとも２回取り出される確率は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケコ}}}$ である。

(3)　この試行を繰り返すとき，１回目から４回目までに取り出された数字に，１から４までのすべての数字が現れる確率は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。また，４回繰り返してもどれかの数字が現れないという条件のもとで，更に，もう１度試行を行うと１から４までのすべての数字が現れる条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}}$ である。

［2］　壺を 3 個用意し，そのうち 2 個の壺には，それぞれ，1 から 4 までの数字が一つずつ書かれた 4 枚のカードが入っている。残りの 1 個の壺には，数字 1 の書かれたカードが 2 枚，数字 2，3 の書かれたカードがそれぞれ 1 枚入っている。はじめの 2 個の壺を A 型の壺，残り 1 個の壺を B 型の壺と呼ぶ。ただし，これらの壺は外から見て区別できない。

これら 3 個の壺から 1 個をでたらめに選び，更にそこからカードを 1 枚取り出しその数字を記録してもとの壺に戻す，という試行を行う。

この試行を 2 回反復したところ，取り出された数字が 2 回とも 1 であった。このとき 1 回目に選んだ壺が B 型であった条件つき確率は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

第４講　整数の性質

1　$a=407$，$b=481$ とする。

(1)　a と b の最大公約数は アイ であり，最小公倍数は ウエオカ である。

$\sqrt{abc}$ が整数となる正の整数 c の中で，最小のものは キクケ である。

(2)　a と b の最大公約数が アイ であることに注意すると，不定方程式

$$ax=-by$$

の整数解は，$x=$ コサシ k，$y=$ スセ k（k は整数）である。

(3)　不定方程式 $ax+by=40700$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組は ソ 組あり，その中で x が最も小さいものは $x=$ タ，$y=$ チツ である。

2　不定方程式

$$92x+197y=1$$

をみたす整数 x，y の組の中で，x の絶対値が最小のものは

$x=$ [アイ]，　$y=$ [ウエ]

である。不定方程式

$$92x+197y=10$$

をみたす整数 x，y の組の中で，x の絶対値が最小のものは

$x=$ [オカキ]，　$y=$ [クケ]

である。

第５講　平面図形

1　二等辺三角形 ABC において，AB＝AC＝2，BC＝3 とする。

直線 AC 上に，C とは異なる点 D を ∠ABC＝∠ABD を満たすようにとると，

$\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。△ABD と △BCD において，∠ABD＝∠BCD で ∠D は共通

であるから，$\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。$\dfrac{\text{AD}}{\text{CD}}=\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}\cdot\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}$ に着目するとCD＝$\dfrac{\boxed{\text{オカ}}}{\boxed{\text{キ}}}$

である。

△BCD の外接円を O とし，点 B における円 O の接線と直線 AC との交点を E とすると，点 E は辺 AC の A の側の延長上にある。このとき

$$\angle\text{DBE}=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\angle\text{ABE}$$

であるから，$\dfrac{\text{DE}}{\text{BE}}=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である。

（次ページに続く）

　また，線分 BE は線分 **シ** と同じ長さである。 シ に当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　AB　　①　AD　　②　AE　　③　BC　　④　CD

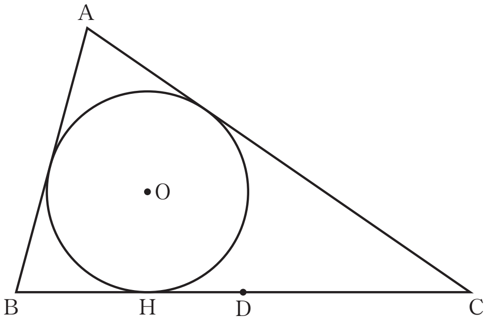
したがって，$\mathrm{DE}=\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

　辺 BC の中点を M とし，線分 EM と線分 BD の交点を F とすると

$$\frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{EF}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}$$

である。

2　△ABC の内心を O，内接円 O と辺 BC の接点を H とする。辺 BC 上に点 D をとる。ただし，D は B，C と異なる点とする。



参考図

△ABD の内心を P とし，内接円 P と辺 BD の接点を E とする。△ACD の内心を Q とし，内接円 Q と辺 CD の接点を F とする。

PQ を直径とする円と 2 点 D，H の間の関係で △ABC がどのような形でも成り立つものを調べる。

次の［オ］には，下の⓪～③のうちから当てはまるものを一つ選べ。

$\angle ADP = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \angle ADB$，$\angle ADQ = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}} \angle ADC$ であるから，PQ を直径とする円と点 D の関係について正しい選択肢は［オ］である。

⓪　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の内部にある。
①　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円周上にある。
②　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，D はその円の外部にある。
③　D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，D は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

（次ページに続く）

次の［カ］～［サ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを繰り返し選んでもよい。

$$\mathrm{BH}=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}})\quad\cdots\cdots①$$

$$\mathrm{BE}=\frac{1}{2}(\mathrm{AB}+\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}})\quad\cdots\cdots②$$

$$\mathrm{DF}=\frac{1}{2}(\mathrm{CD}+\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}})\quad\cdots\cdots③$$

である。

⓪ AC　① AD　② BC　③ BD

次の［シ］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

①～③から，EH＝［シ］であることがわかる。

⓪ FQ　① OP　② $\frac{1}{2}$EP　③ DF

次の［ス］に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

PQ の中点を J とする。J を通り辺 BC に垂直な直線と BC の交点を K とすると，K は EF の中点であるから，HK＝［ス］である。

⓪ DK　① $\frac{1}{2}$JK　② EH　③ $\frac{1}{2}$FK

（次ページに続く）

次の セ に当てはまるものを，下の⓪～③のうちから一つ選べ。

HK＝ ス に着目すると，PQ を直径とする円と点 H の関係について，正しい選択肢は **セ** である。

⓪　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の内部にある。

①　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円周上にある。

②　D が辺 BC 上のどの位置にあっても，H はその円の外部にある。

③　D が辺 BC 上のどの位置にあるかに応じて，H は，円の内部，円周上，円の外部のどの場合もある。

テキスト解答

【講義問題の略解】

※講義授業の内容を補完するものです．記述式の試験の答案を想定したものとはなっておりません．ご了承ください．

第１講　式と計算・関数・命題

1 (1)　$k=\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{6(\sqrt{3}-1)}{3-1}=3(\sqrt{3}-1)=\mathbf{3\sqrt{3}-3}$

$=\sqrt{27}-3$

$5<\sqrt{27}<6$ より，$2<k<3$　　よって，k の整数部分は **2**

(2)　$6\geqq|(\sqrt{3}+1)x-12|$ より，$-6\leqq(\sqrt{3}+1)x-12\leqq 6$

$6\leqq(\sqrt{3}+1)x\leqq 18$　　$\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}\leqq x\leqq\dfrac{6}{\sqrt{3}+1}\times 3$　　つまり，$k\leqq x\leqq 3k$

(1)より，$k=3\sqrt{3}-3$　　よって，$\mathbf{3\sqrt{3}-3}\leqq x\leqq\mathbf{9\sqrt{3}-9}$

$9\sqrt{3}-9=\sqrt{243}-9$　　$15<\sqrt{243}<16$ より，$6<\sqrt{243}-9<7$

よって，$2<k\leqq x\leqq 3k<7$ より，不等式を満たす x は $x=3$，4，5，6 の **4** 個.

2 ①：$y=a^2x^2-4ax+b=a^2\left(x^2-\dfrac{4}{a}x\right)+b=a^2\left\{\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2-\dfrac{4}{a^2}\right\}+b$

$=a^2\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2-4+b$

よって，この式のグラフ（放物線）の頂点の x 座標は，$x=\dfrac{2}{a}$

これが１以上３以下になるのは，$1\leqq\dfrac{2}{a}\leqq 3$　　辺々を $a(>0)$ 倍して，$a\leqq 2\leqq 3a$

よって，$\mathbf{\dfrac{2}{3}}\leqq a\leqq\mathbf{2}$

２次不等式 $a^2x^2-4ax+b<0$…②の解が存在するのは，①のグラフが x 軸と異なる２点で交わるときであり，それはこのグラフの頂点の y 座標が負のときである.

よって，$-4+b<0$ より，$b<\mathbf{4}$（⓵）

また，②の解が $1<x<3$ となるとき，①のグラフを表す式は

$y=a^2(x-1)(x-3)=a^2(x^2-4x+3)=a^2x^2-4a^2x+3a^2$

と表される．この式と①の式を係数比較して

$4a^2=4a$，$3a^2=b$　　これを解いて，$a=\mathbf{1}$，$b=\mathbf{3}$

3 (1)　命題Ａ：「$x^2>2$ または $x^3>0$」ならば「$x>2$」の

逆：「$x>2$」ならば「$x^2>2$ または $x^3>0$」（⓸，⓪）

対偶：「$x\leqq 2$」ならば「$x^2\leqq 2$ かつ $x^3\leqq 0$」（⓹，⓷）

(2)　命題Aは偽（反例：$x=1$）.
命題Aとその対偶の真偽は一致するので，命題Aの対偶も偽.
$x^2>2$ より，$x<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<x$　　$x>2$ は $x>\sqrt{2}$ に含まれる.
よって，命題Aの逆は真.
以上より，命題Aの逆のみが真（①）.

(3)　(2)より，「$x^2>2$ または $x^3>0$」ならば「$x>2$」は偽.
よって，「$x^2>2$ または $x^3>0$」は「$x>2$」であるための十分条件ではない.
また，(2)より，「$x>2$」ならば「$x^2>2$ または $x^3>0$」は真.
よって，「$x^2>2$ または $x^3>0$」は「$x>2$」であるための必要条件である.
したがって，正しいのは⓪である.

第２講　三角比・データの分析

1 (1) △ABC において余弦定理より，

$$\cos\angle B=\frac{4^2+(10\sqrt{3})^2-14^2}{2\cdot 4\cdot 10\sqrt{3}}=\frac{120}{2\cdot 4\cdot 10\sqrt{3}}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

よって，$\angle B=30^\circ$ より，$\sin\angle B=\frac{1}{2}$

△ABD において正弦定理より，$\frac{AD}{\sin\angle B}=2R$

よって，$\frac{AD}{R}=2\times\sin\angle B=2\times\frac{1}{2}=\mathbf{1}$ より，$AD=R$

したがって，点 D が辺 BC 上を動くとき，R が最小となるのは辺 AD の長さが最小となるときであり，それは $\angle ADB=90^\circ$ のときである．

このとき，直角三角形 ADB において，$R=AD=AB\times\sin\angle B=4\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$

(2) △ABD の外接円の中心が辺 BC 上にあるとき，辺 BD は外接円の直径であり，$\angle BAD=90^\circ$ である．これと $\angle B=30^\circ$ より，$AD:AB=1:\sqrt{3}$

よって，$R=AD=\frac{1}{\sqrt{3}}AB=\frac{1}{\sqrt{3}}\times 4=\mathbf{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$

また，$BD=2R=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ より，$CD=BC-BD=10\sqrt{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{22\sqrt{3}}{3}$

したがって，$\triangle ACD=\frac{1}{2}\times CD\times AD\times\sin\angle ADC$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{22\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\sin 120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{22\sqrt{3}}{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{22\sqrt{3}}{3}}$$

2 [1] 30 人の得点の中央値は，得点の小さい順に並べたときの 15 番目と 16 番目の人の得点の平均である．表 2 の度数分布表より，15 番目，16 番目は，それぞれ 60 点以上 70 点未満の階級における小さい方から 5 番目と 6 番目である．

表 1 から 60 点以上 70 点未満の得点を抜き出し，小さい順に並べると

61，62，63，65，66，68

である．よって，求める中央値は，$\frac{66+68}{2}=\mathbf{67}$

[2] (1) ⓪～⑤のそれぞれの真偽を調べる．

⓪について，明らかに正しい．

①について，四分位範囲が最も大きいのは，箱ひげ図より C 組である．よって，**①は誤り**．

②について，明らかに正しい．

③について，明らかに正しい．

④について

箱ひげ図より，A 組の第 1 四分位数は 60 点，第 3 四分位数は 80 点である．

得点を小さい順に並べたとき，第 1 四分位数は 8 番目，第 3 四分位数は 23 番目である．

よって，1 番目～7 番目の 7 人は 60 点以下より，60 点未満の人数は 7 人以下である．

また，24 番目～30 番目の 7 人は 80 点以上であり，23 番目の生徒を加えると，少なくとも 8 人は 80 点以上である．さらに，9 番目～22 番目にも 80 点の生徒がいる可能性がある．したがって，80 点以上の人数は 8 人以上である．

ゆえに，**④は誤り**である．

⑤について

A 組について，中央値（小さい方から 15 番目と 16 番目の平均）が 70 点より大きいので，70 点以下の生徒は 16 番目～30 番目には存在しない．よって，70 点以下の生徒は，多くて 1 番目～15 番目の 15 人，つまり 15 人以下である．

C 組について，中央値が 70 点ちょうどである．よって，1 番目～15 番目の生徒 15 人は 70 点以下であり，また，16 番目～30 番目の生徒にも 70 点の生徒が存在する可能性がある．したがって，70 点以下の生徒は 15 人以上である．

ゆえに，⑤は正しい．

(2)　箱ひげ図より，第 1 四分位数（小さい方から 8 番目）の生徒は 60 点以上 70 点未満，第 3 四分位数（小さい方から 23 番目＝大きい方から 8 番目）の生徒は 80 点以上 90 点未満である．

ヒストグラム⓪～③から

⓪について，大きい方から 8 番目の生徒が 70 点以上 80 点未満より，不適．

①について，小さい方から 8 番目の生徒が 50 点以上 60 点未満より，不適．

②について，適する．

③について，大きい方から 8 番目の生徒が 70 点以上 80 点未満より，不適．

[3]　(1)　表 3 の科目 X，科目 Y の得点について，

科目 X の得点の最大値は 84 点で，(X，Y)＝(84，66)

科目 Y の得点の最大値は 84 点で，(X，Y)＝(78，84)

散布図⓪～③から

⓪について，Y の最大値が 84 点より大きいので，不適．

①について，X の最大値が 84 点より大きいので，不適．

②について，X，Y の最大値が 84 点より大きいので，不適．

③について，適する．

(2)　得点を $\dfrac{1}{2}$ にしたとき，平均値および偏差も $\dfrac{1}{2}$ となる．

ここで，（偏差の２乗）の平均である分散は，もとの分散の $\dfrac{1}{4}$ となるが，

その分散の正の平方根である標準偏差は，もとの標準偏差の $\dfrac{1}{2}$ となる．

また，X と Y の共分散については，（X の偏差と Y の偏差の積）の平均であり，

X の偏差，Y の偏差がともに $\dfrac{1}{2}$ のとき，その積はもとの積の $\dfrac{1}{4}$ となり，

その平均である共分散も $\dfrac{1}{4}$ となる．したがって，正しいのは②である．

第３講　場合の数・確率

1 (1)　同じものを含む順列の総数より，8 桁の整数の個数は $\dfrac{8!}{4!2!2!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=420$ (個)

[2][2][5][5] の 4 枚のカードの並べ方は $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り。このそれぞれについて，4 枚のカードの間または両端の 5 カ所から異なる 4 カ所を選んで，残りの 1 のカードを入れる方法は ${}_5C_4=5$ 通り。

よって，条件(＊)が満たされるときにできる 8 桁の整数の個数は $6\times5=30$ (個)

(2)　8 枚のカードをすべて区別すると，8 枚から 3 枚を取り出す方法は ${}_8C_3$ 通り。

5 が 0 枚である取り出し方は，5 以外の 6 枚から 3 枚を取り出す場合で ${}_6C_3$ 通り。

よって　$P(A_0)=\dfrac{{}_6C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{5}{14}$

5 が 1 枚である取り出し方は，5 の選び方が 2 通り，他の 2 枚の選び方が ${}_6C_2$ 通り。

よって　$P(A_1)=\dfrac{2\times{}_6C_2}{{}_8C_3}=\dfrac{2\times\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{15}{28}$

5 が 2 枚である取り出し方は，5 の選び方が 1 通り，残り 1 枚の選び方が 6 通り。

よって　$P(A_2)=\dfrac{1\times6}{{}_8C_3}=\dfrac{6}{\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}}=\dfrac{3}{28}$

$A_1\cap B$ は，試行 T_1 で 5 を 1 枚取り出し，試行 T_2 で 3 枚が入った袋の中からその 5 を取り出す場合で

$$P(A_1\cap B)=\frac{15}{28}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{28}$$

$A_2\cap B$ は，試行 T_1 で 5 を 2 枚取り出し，試行 T_2 で 3 枚が入った袋の中から 2 枚ある 5 のうち 1 枚を取り出す場合で

$$P(A_2\cap B)=\frac{3}{28}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{14}$$

T_2 で 5 が取り出される事象は，T_1 で 5 を 1 枚または 2 枚取り出し，T_2 で 5 を取り出す場合で，その確率は $P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)$ である。またそのときに，袋の中にもう 1 枚の 5 が入っている事象は $A_2\cap B$ であるから，求める条件付き確率は

$$\frac{P(A_2\cap B)}{P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)}=\frac{\dfrac{1}{14}}{\dfrac{5}{28}+\dfrac{1}{14}}=\frac{2}{7}$$

2 [1]　(1)　2 回の数字の出方は，全部で 4×4 通り。

2 回続けて 1 が取り出される場合の数は，1×1 通り。

よって，2 回続けて 1 が取り出される確率は，$\dfrac{1\times1}{4\times4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{16}}$

また，2 回続けて奇数が取り出される場合の数は，2×2 通り

よって，2 回続けて奇数が取り出される確率は，$\dfrac{2\times 2}{4\times 4}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(2)　1 回の試行で数字 1 が取り出される確率は $\dfrac{1}{4}$，それ以外の数字が取り出される確率は $\dfrac{3}{4}$

4 回の試行において，数字 1 が 1 回のみ取り出される確率は

${}_4C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{4\times 3^3}{4^4}$ であり，数字 1 が 1 回も取り出されない確率は

$\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{3^4}{4^4}$ である．

よって，数字 1 が少なくとも 2 回取り出される確率は，

$$1-\left(\frac{4\times 3^3}{4^4}+\frac{3^4}{4^4}\right)=1-\frac{108+81}{4^4}=1-\frac{189}{256}=\mathbf{\frac{67}{256}}$$

(3)　1 回目から 4 回目までに取り出された数字に 1 から 4 までのすべての数字が現れる場合の数は，1, 2, 3, 4 の 4 つの数字の順列を考えて，4!＝4×3×2×1 通り

よって，その確率は，$\dfrac{4\times 3\times 2\times 1}{4^4}=\mathbf{\dfrac{3}{32}}$

　4 回繰り返してもどれかの数字が現れない事象を A，5 回の試行で 1 から 4 までのすべての数字が現れる事象を B とすると，求める条件付き確率は $P_A(B)$ である．

事象 A は，4 回までに取り出した数字が

(i) 1 種類　　(ii) 2 種類　　(iii) 3 種類

のとき．

(i)のとき，4 通り

(ii)のとき，${}_4C_2\times(2^4-2)=6\times(16-2)=84$ 通り

(iii)のとき，${}_4C_3\times 3\times\dfrac{4!}{2!}=144$ 通り

よって，4 回繰り返してもどれかの数字が現れない確率は，

$$P(A)=\frac{4+84+144}{4^4}=\frac{29}{32}$$

また，事象 $A\cap B$ は，(iii)かつ 1 回目から 4 回目に出ていない数字が 5 回目に出る場合で，5 回目の数字は 1 通りに決まる．よって，$P(A\cap B)=\dfrac{144\times 1}{4^5}=\dfrac{9}{64}$

したがって，$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{\frac{9}{64}}{\frac{29}{32}}=\mathbf{\dfrac{9}{58}}$

[2]　この試行を1回行ったときに1が出るのは，3つの壺からA型の壺を選び，そこから1を選ぶとき，または3つの壺からB型の壺を選び，そこから1を選ぶ場合である．

よってその確率は，$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{3}$

したがって，2回反復したとき，2回とも1が出る確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

また，1回目にB型の壺を選び，そこから1を選び，2回目に壺の型に関わらず1が出る確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$

よって，求める条件付き確率は，$\dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

第４講　整数の性質

1 ⑴　互除法により，

$481=407\times1+74$

$407=74\times5+37$

$74=37\times2$

したがって，a と b の最大公約数は **37**

この結果より，$a=407=37\times11$，$b=481=37\times13$ と表すことができる．

よって，a と b の最小公倍数は，$37\times11\times13=$**5291**

$\sqrt{abc}=\sqrt{37^2\times11\times13\times c}$ が整数となる正の整数 c のうち，最小のものは，

$11\times13=$**143**

⑵　$ax=-by$，つまり $37\times11\times x=-37\times13\times y$ より，$11x=-13y$

x，y が整数のとき，11 と 13 は互いに素より，y は 11 の倍数．

よって，$y=11k$（k は整数）と表される．

このとき，$11x=-13\times11k$ より，$x=-13k$ と表される．

したがって，$x=$**$-13k$**，$y=$**$11k$**（k は整数）

⑶　$ax+by=40700$，つまり $407x+481y=407\times100$ …①より，

この方程式を満たす整数解の 1 つは $x=100$，$y=0$ である．

よって，$407\times100+481\times0=407\times100$ …②

①－②より，$407(x-100)+481y=0$，つまり $a(x-100)=-by$ と表される．

よって，⑵の結果より，$x-100=-13k$，$y=11k$，つまり

$x=100-13k$，$y=11k$（k は整数）

と表される．

$x\geqq0$ より，$100-13k\geqq0$　よって，$k\leqq7$　　$y\geqq0$ より，$11k\geqq0$　よって，$k\geqq0$

したがって，$0\leqq k\leqq7$ より，これを満たす整数 k は 8 個であるから，0 以上の整数 x，y の組は **8** 組

このうち，x が最も小さいのは $k=7$ のときで，このとき $x=$**9**，$y=$**77**

2 互除法により，$197=92\times2+13$ …①

$92=13\times7+1$ …②

よって，197 と 92 の最大公約数は 1 である．

①より，$13=197-92\times2$ …①′　　②より，$1=92-13\times7$ …②′

②′ に①′ を代入して，$1=92-(197-92\times2)\times7$

$=92-197\times7+92\times14$

$=92\times15-197\times7$

よって，$92\times15+197\times(-7)=1$ …③

これは，方程式 $92x+197y=1$ …④の解の 1 つが $x=15$，$y=-7$ であることを表して

いる．

④－③より，$92(x-15)+197(y+7)=0$　　つまり，$92(x-15)=197(-y-7)$

92，197 は互いに素より，$x-15$ は 197 の倍数．

よって，$x-15=197k$（k は整数）と表される．

このとき，$92\times197k=197(-y-7)$ より，$92k=-y-7$

したがって，$x=197k+15$，$y=-92k-7$（k は整数）と表される．

この整数 x，y の組で，x の絶対値が最小のものは，$k=0$ のときの $x=\mathbf{15}$，$y=\mathbf{-7}$

また，③の両辺を 10 倍することにより，$92\times150+197\times(-70)=10$ …⑤

これは，方程式 $92x+197y=10$ …⑥の解の 1 つが $x=150$，$y=-70$ であることを表している．

⑥－⑤より，$92(x-150)=197(-y-70)$

よって，$x=197\ell+150$，$y=-92\ell-70$（ℓ は整数）と表される．

この整数 x，y の組で，x の絶対値が最小のものは，$\ell=-1$ のときの $x=\mathbf{-47}$，$y=\mathbf{22}$

第5講　平面図形

1　△BCD において，角の二等分線の性質より，

BC：BD＝AC：AD，つまり 3：BD＝2：AD より，3AD＝2BD　よって，$\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

また，△ABD∽△BCD より，$\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}=\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}=\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

AD＝x とおくと，$\dfrac{\text{AD}}{\text{CD}}=\dfrac{\text{AD}}{\text{BD}}\cdot\dfrac{\text{BD}}{\text{CD}}$ より，$\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

よって，$9x=4(x+2)$，つまり $x=\dfrac{8}{5}$ より，CD＝AC＋AD＝$2+\dfrac{8}{5}=\dfrac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}$

接弦定理より，∠DBE＝∠DCB

また，二等辺三角形 ABC において ∠ACB＝∠ABC であり，

仮定より ∠ABC＝∠ABD であることから，∠DBE＝∠ABD

よって，∠DBE＝$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$∠ABE

したがって，△ABE において角の二等分線の性質より，

AB：BE＝AD：DE，つまり 2：BE＝$\dfrac{8}{5}$：DE であるから，2DE＝$\dfrac{8}{5}$BE

よって，$\dfrac{\text{DE}}{\text{BE}}=\dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$

また，∠EAB＝∠ABC＋∠ACB＝2∠ABC より，

△ABE は AE＝BE の二等辺三角形である（②）．

これと $\dfrac{\text{DE}}{\text{BE}}=\dfrac{4}{5}$ より，$\dfrac{\text{DE}}{\text{AE}}=\dfrac{4}{5}$ であるから，AD：DE＝1：4　つまり　DE＝4AD

AD＝$\dfrac{8}{5}$ より，DE＝$4\times\dfrac{8}{5}=\dfrac{\mathbf{32}}{\mathbf{5}}$

メネラウスの定理から，$\dfrac{\text{CB}}{\text{BM}}\cdot\dfrac{\text{MF}}{\text{FE}}\cdot\dfrac{\text{ED}}{\text{DC}}=1$　つまり　$\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{\text{FM}}{\text{EF}}\cdot\dfrac{\frac{32}{5}}{\frac{18}{5}}=1$

よって，$\dfrac{\text{FM}}{\text{EF}}=\dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{32}}$

2　内心は三角形の内角の二等分線の交点であることより，

$$\angle\text{ADP}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\angle\text{ADB},\ \angle\text{ADQ}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\angle\text{ADC}$$

よって，∠PDQ＝∠ADP＋∠ADQ＝$\dfrac{1}{2}$(∠ADB＋∠ADC)＝$\dfrac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$ より，

PQ を直径とする円の円周角上に点 D がある（①）．

また，BH＝x とおくと，円の接線の長さの性質から，

$$\text{AC}=(\text{AB}-x)+(\text{BC}-x)\quad\text{つまり}\quad x=\frac{1}{2}(\text{AB}+\text{BC}-\text{AC})$$

$BH = x = \dfrac{1}{2}(AB + BC - AC)$ …①（②，⓪）

同様に，$BE = \dfrac{1}{2}(AB + BD - AD)$ …②（③，①）

$DF = \dfrac{1}{2}(CD + AD - AC)$ …③（①，⓪）

よって，①～③より，

$EH = BH - BE$

$= \dfrac{1}{2}(AB + BC - AC - AB - BD + AD)$

$= \dfrac{1}{2}(BC - BD - AC + AD) = \dfrac{1}{2}(CD + AD - AC) = DF$ であるから

$EH = DF$（③）

また，PE⊥BC，QF⊥BC であり，JK⊥BC であることから，PE∥JK∥QF

よって，J が PQ の中点であるから，K は EF の中点.

したがって，HK＝EK－EH＝KF－DF＝DK より，HK＝DK（⓪）

HK＝DK，および JK⊥HD に着目すると，△JHK≡△JDK より，

△JDH は JD＝JH の二等辺三角形.

JD は PQ を直径とする円の半径より，JH もこの円の半径.

したがって，H はこの円の円周上にある（①）.

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。